17007

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / **Department of Examinations, Sri Lanka**

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1993 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1993

(01) ශුද්ධ ගණිතය I
(01) Pure Mathematics I

01 S I

පැ තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න **හයකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (a) $S_n = \sum_{r=1}^{n} u_r$ යැයි ගනිමු ; මෙහි $u_r = r(r+1)(r+2)$.

$S_n = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $V_r = \frac{1}{S_r}$ විට

$\sum_{r=1}^{n} V_r$ සොයන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවන බව ද එහෙත්

$\sum_{r=1}^{\infty} V_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව ද අනන්තය තෙක් එහි ඓක්‍යය $\frac{2}{9}$ බව ද පෙන්වන්න.

(b) ගණිත අභ්‍යුහනය මූලධර්මය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, n යනු ධන නිඛිලයක් විට

$$2^{2n+1} - 6n - 2$$

යන්න 18 න් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න.

2. (a) $\frac{x^2 + 9x - 20}{x^2 - 11x + 30} \geq -1$ ද $x^2 - 11x + 30 \neq 0$ ද

වන පරිදි වූ x හි අගය පරාසය සොයන්න.

(b) a, b, c, p, q, r සියල්ලම ධන නම්

$$\left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c}\right)\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r}\right) \geq 9$$

බව පෙන්වන්න.

(c) $|5-3x| \geq 2-3x$

වන පරිදි වූ x හි අගය පරාසය සොයන්න.

3. (a) a, b, c සියල්ලම ප්‍රභින්න යැයි උපකල්පනය කරමින්

$$\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)} \quad \text{ප්‍රකාශනය} \quad k + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි k, A, B, C යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$a = b \neq c$ අවස්ථාව ද සාකච්ඡා කරන්න.

a, b, c, d සියල්ල ම ප්‍රභින්න විට

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 1$$

බව අපෝහනය කරන්න.

(b) ඒකජ සාධක දෙකක් ලබා ගැනීමෙන්

$$(a-x)^4 + (x-1)^4 - (a-1)^4$$

ප්‍රකාශනයේ සාධක සොයන්න

4. $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = 1$ සපුරාලන, $-\pi < \theta \leq \pi$ ප්‍රාන්තරයෙහි පිහිටියා වූ θ හි ප්‍රභින්න අගයන් තුන නිර්ණය කරන්න.

එනයින්, $\omega^3 = 1$ සමීකරණය සපුරාලන එකිනෙකට වෙනස් ω සංඛ්‍යා $a + ib$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි a සහ b තාත්ත්වික වේ. $\omega \neq 1$ නම්, $1 + \omega + \omega^2 = 0$ බව අපෝහනය කරන්න.

p සහ q තාත්ත්වික විට, $x^3 - 3pqx - p^3 - q^3$

ප්‍රකාශනය

$$(x - p - q)(x - p\omega - q\omega^2)(x - p\omega^2 - q\omega)$$

ආකාරයෙන් සාධකවලට බිඳිය හැකි බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $z^3 - 18z - 35 = 0$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවල අගයන් සොයන්න.

5. ආර්ගන් සටහනෙහි, z_1 සහ z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් P_1 සහ P_2 ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කෙරේ. λ යනු තාත්ත්වික පරාමිතියක් විට $z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආර්ගන් සටහනෙහි නිරූපණය කැරෙන P ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම සොයන්න.

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \quad \text{සහ} \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

යැයි ගනිමු.

$$\frac{P_1P'}{P_1P_2} = \frac{1}{3} \quad \text{සහ} \quad \frac{P_1P''}{P_1P_2} = -1$$

වන පරිදි සහ P_1P_2 මත ලක්ෂ්‍ය දෙකම පවතින සේ පිහිටියාවූ P' සහ P'' ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් නිරූපණය කැරෙන z' සහ z'' සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

තවද, විස් (z') සහ විස් (z'') ලබාගන්න. $(-\pi <$ විස් $z \leq \pi)$

එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, P' සහ P'' ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් P_1OP_2 කෝණයේ අභ්‍යන්තර සහ බාහිර සමච්ඡේදක මත පිහිටන බව පෙන්වන්න ; මෙහි O මූලය වේ.

6. (*a*) *GONAPINUWALA* වචනයේ අක්ෂරවලින් සෑදිය හැකි විවිධ සංකරණ සංඛ්‍යාව,

(i) අක්ෂර දෙළහෙන් වරකට අක්ෂර සියල්ලම ගත් විට

(ii) අක්ෂර දෙළහෙන් වරකට ඕනෑම අක්ෂර හතරක් ගත් විට

සොයන්න.

(*b*) එකිනෙකට වෙනස් රිදී කාසි දහයක් සහ එකිනෙකට වෙනස් තඹ කාසි පහක් අඩංගු මල්ලකින් කාසි අටක් ගත හැකි සංයෝජන සංඛ්‍යාව,

(i) තේරීම් මත කිසිම සීමා කිරීමක් නොමැති විට

(ii) තෝරාගත් කාසි අතර යටත් පිරිසෙයින් තඹ කාසි දෙකක් වත් තිබිය යුතු විට,

සොයන්න.

7. සුපුරුදු අංකනයෙන්, n ධන නිඛිලයක් විට,

$$(a + x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1} x + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + \dots + {}^nC_r\, a^{n-r} x^r + \dots + x^n$$

බව සාධනය කරන්න.

හුදෙක් වීජීය ක්‍රම යොදා ගැනීමෙන්

(i) $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \dots + rC_r + \dots + n\,C_n = n\,2^{n-1}$

(ii) $C_0 - \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \dots + (-1)^r \frac{C_r}{r+1} + \dots + (-1)^n \frac{C_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

බව පෙන්වන්න ; මෙහි

$$(1 + x))^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_r x^r + \dots + x^n.$$

8. (*a*) $-1 < x < 1$ විට x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+x}\right)$

සහ (ii) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{4 + x^4}}\right)$

උත්තර දෙකම සමාන වන්නේ මන් දැයි පහදන්න.

(*b*) ප්‍රථමධර්මවලින්, x විෂයයෙන් $\sec x$ හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සහ $y = (\sec x + \tan x)^{\frac{1}{2}}$ නම්

(i) $2\frac{dy}{dx} = y \sec x$

සහ (ii) $2\frac{d^2y}{dx^2} = (\sec x + 2\tan x)\frac{dy}{dx}$

බව සාධනය කරන්න.

9. (a) $\int \frac{8x + 7}{2x^2 + 8x + 10} \, dx$ සොයන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය කිරීමෙන්,

$$3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}} x \, dx$$

බව පෙන්වන්න.

(c) $x = \tan\theta$ ආදේශයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, n ධන නිඛිලයක් විට,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \left(\frac{2n-4}{2n-2}\right) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

බව සාධනය කරන්න.
එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයෙකින් හෝ,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^4} = \frac{5\pi}{32}$$

බව පෙන්වන්න.

10. (a) $y = e^x \sin x$ නම් $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}\, e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

බව පෙන්වන්න.
එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, x^6 පදය තෙක් $e^x \sin x$ සඳහා මැක්ලෝරින් ප්‍රසාරණය ලියන්න.

(b) Ox අක්ෂයේ සෑම ඒකක $\frac{1}{2}$ කට ම කෝටික ගැනීමෙන් සිම්සන් සූත්‍රය යොදා,

$$\int_0^4 \frac{4x - x^2}{x^2 + 4} \, dx$$

සඳහා දළ අගයක් සොයන්න.

$y = \frac{4x - x^2}{x^2 + 4}$ සඳහා පහත දක්වෙන වගුව භාවිත කරන්න.

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y	0	0.4118	0.6	0.6	0.5	0.3659	0.7308	0.1077	0

11. $x = t^2 - 2t$, $y = t^3 - 12t$ සමීකරණවලින් වක්‍රයක් පරාමිතිකව දී ඇත. $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ රාශි t ඇසුරෙන් සොයන්න.

එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, වක්‍රය මත උපරිම හා අවම ලක්ෂ්‍ය ලබාගන්න. $P(8, 16)$ ලක්ෂ්‍යයට අනුරූප වූ t හි අගයන් නිර්ණය කරන්න. P ගැන කුමක් කිව හැකි ද?

තවද, වක්‍රය ඛණ්ඩාංක අක්ෂ ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යයන් ද y අක්ෂයට සමාන්තරව ස්පර්ශක පවතින ලක්ෂ්‍යයන් ද නිර්ණය කරන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන්, වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

12. $y = \frac{(x-2)^2}{x^2+4}$ මගින් C වක්‍රයක් ගෙන දේ.

(i) $0 \leq y \leq 2$ සහ (ii) $x \to \pm\infty$ විට $y \to 1$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ C මත ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ලියන්න. C වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

C වක්‍රය උපයෝගී කර ගැනීමෙන් සහ සමමිතික බව සැලකීමෙන්, $y = \frac{(x+2)^2}{x^2+4}$ මගින් දෙනු ලබන C' වක්‍රයේ දළ සටහනක්ද එම රූ සටහනෙහිම අඳින්න.

තවද C වක්‍රයෙනුත් $x = 2$, $y = 1$ රේඛා මගිනුත් අන්තර්ගත වන S පෙදෙසේ වර්ගඵලය සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $x = 2$ රේඛාවෙනුත් $0 \leq x \leq 2$ ප්‍රාන්තරයේ දී C, C' වක්‍ර මගින් සැදෙන C'' වක්‍රයෙනුත් අන්තර්ගත වන S' පෙදෙසේ වර්ගඵලය අපෝහනය කරන්න.

$y = 1$ රේඛාව වටා රේඩියන් π වලින් S' භ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඝනයේ පරිමාව සොයන්න.